



PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

Simulação numérica do comportamento estacionário
da interface gás-sólido durante a extração de óleo em
reservatórios heterogêneos

Por:

Ernane Ruas Neiva Júnior

Brasília, dezembro de 2013

Universidade de Brasília

Faculdade de Tecnologia

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade de Brasília
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

Simulação numérica do comportamento estacionário da interface gás-sólido durante a extração de óleo em reservatórios heterogêneos

Por:
Ernane Ruas Neiva Júnior

*Relatório submetido ao Departamento de Engenharia
Mecânica como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico*

Banca examinadora

Prof. Gustavo Coelho Abade, ENM/UnB
Orientador

Prof. Eugênio Libório Feitosa Fortaleza, ENM/UnB
Examinador

Prof. Mario Benjamin Batista Siqueirara, ENM/UnB
Examinador

Brasília, dezembro de 2013

Agradecimentos

Gostaria de agradecer as seguintes instituições: ANP (agência Nacional do Petróleo), FINEP (Agência Brasileira da Inovação), MCT Ministério de Ciência e Tecnologia), a Petrobras pelo suporte e financiamento do presente estudo no contexto do PRH PB 223, a ANP e Chevron pelo projeto 'Controle de injeção de água em reservatórios de óleo pesado' que permitiu a construção do experimento utilizado.

Agradeço ainda ao professor Eugênio Fortaleza pela oportunidade, pela simpatia, sinceridade e conselhos que estão sendo muito úteis para minha formação.

Agradeço principalmente ao meu professor orientador Gustavo Coelho Abade (a quem tenho profunda admiração e respeito) por toda paciência, dedicação, conhecimentos a mim transmitidos e por todo o apoio que sempre me foi dado.

Ernane Ruas Neiva Júnior

Resumo

Este trabalho apresenta a modelagem em regime permanente, através da solução da equação de Darcy pelo método de diferenças finitas, da interface entre dois fluidos imiscíveis (gás e óleo) escoando em um meio natural quando submetidos a uma vazão de extração constante. As condições de contorno e solução do problema serão apresentadas para os casos de um meio poroso homogêneo e com inclusões impermeáveis, assim como para meios porosos isotrópicos e anisotrópicos. Os resultados obtidos a partir deste trabalho serão analisados e comparados entre si, com resultados de outros trabalhos [3] [5] e com a solução analítica das equações pela aproximação de Dupuit.

O trabalho produzirá como resultados um parâmetro adimensional para o problema, a vazão crítica de extração, o formato da interface que separa os dois fluidos. Com isso será feita uma análise do comportamento da superfície livre (quando alteradas as permeabilidades horizontal e vertical do meio natural). Será apresentada a similaridade dinâmica existente entre os meios isotrópicos e anisotrópicos, e conclusões a respeito da comparação do código utilizado com resultados experimentais de uma célula de Hele-Shaw.

Uma conclusão importante aqui apresentada será que para um meio poroso que tenha dimensões horizontais muito superiores às verticais ($H/L \rightarrow \infty$), qualquer vazão de sucção a que o poço for submetido levará ao colapso da interface.

A utilidade deste trabalho está focada em estudos posteriores dedicados a controle de processos de extração de fluidos(óleo/gás) em reservatórios naturais que visam melhorar a taxa de recuperação do poço.

Sumário

1	Introdução	6
1.1	Problema	8
1.1.1	Objetivos específicos	8
2	Equações governantes	10
2.1	Parâmetro adimensional	11
2.2	Formulação do problema	12
3	Método de Diferenças Finitas	14
3.1	Equações de diferenças finitas	15
4	Testes preliminares	17
5	Problema com sumidouro	20
5.1	Relações entre soluções para problemas de escoamento em meio isotrópico e anisotrópico	22
6	Testes entre código numérico e célula de Hele-Shaw	27
7	Conclusão	32
	Apêndices	34
	Apêndices	37
	Apêndices	41

Lista de Figuras

1.1	Módulo ilustrativo da influência do campo de pressão na superfície livre . .	6
1.2	Modelo da capa de gás existente em alguns reservatórios naturais de óleo .	7
1.3	Modelo representativo do problema, interface óleo-gás em meio poroso . . .	8
2.1	Definição do problema para escoamento em meio poroso bidimensional . . .	10
2.2	Formulação do problema	13
3.1	Modelo utilizado para construção da malha pelo método de diferenças finitas	15
4.1	Modelo de escoamento por infiltração	17
4.2	Forma da superfície livre (problema ilustrado na figura 4.1)	18
5.1	Forma da superfície livre em função do número de Froude(problema ilustrado na figura (2.1)	21
5.2	Forma da superfície livre em função da dimensão do reservatório)	21
5.3	Ilustração dos meios (a)isotrópico e (b) anisotrópico	23
5.4	Similaridade dinâmica teórica entre meio Isotópico e Anisotrópico	25
5.5	Comparação entre resultados e similaridade dinâmica teórica	26
5.6	Extrapolação dos resultados para um meio infinito	26
6.1	Modelo da célula de Hele-Shaw utilizada [3]	27
6.2	Disposição dos espaçadores na célula de Hele-Shaw	28
6.3	Efeito das inclusões impermeáveis no escoamento da célula de Hele-Shaw .	29
6.4	Dimensões da célula de Hele-Shaw utilizada[3]	29
6.5	Experimento realizado com célula de Hele-Shaw	30
6.6	Simulação numérica da célula de Hele-Shaw	30
6.7	Zoom da figura 6.6	31
1	Estêncil da aproximação de diferenças finitas tridimensional.	36
2	Estêncil da aproximação de diferenças finitas.	37

Lista de símbolos

Símbolos Latinos

b	Distância entre as placas planas de uma célula de Hele-Shaw
e_z	Vetor unitário na direção z
g	Modulo da gravidade
\mathbf{g}	Vetor gravidade
H_0	Altura do poço
H_L	Altura do reservatório mais baixo no exemplo aproximação de Dupuit
k	Permeabilidade do meio
K	Condutividade hidráulica
L	Largura do poço
p	Pressão
p_0	Pressão do gás, constante
$S^{(n)}$	Diferença entre resultados de duas iterações consecutivas
Q	Vazão volumétrica
Q_w	Vazão de sucção
t	Tempo
\mathbf{u}	Vetor velocidade do escoamento

Símbolos Gregos

δ	delta de Dirac
ϕ	Altura piezométrica
η	Função que representa a altura da superfície livre
λ	Coefficiente de anisotropia
μ	Viscosidade do fluido
Θ	Função <i>Heaviside</i>
ρ	Densidade do fluido
ψ	Função de corrente
χ	Potencial gravitacional

Grupos Adimensionais

F	Número de Froude
-----	------------------

Subscritos

i	Linha
j	Coluna

Sobrescritos

\cdot	Variação temporal
$*$	Parâmetro adimensional

1

Introdução

Na indústria do petróleo é comum a utilização de bombas centrífugas submersas (BCS) capazes de operar com mistura líquido-gás. Para porcentagens de líquido muito superiores às de gás a bomba possui desempenho similar ao que teria se somente estivesse extraíndo líquido. Porém, para elevadas frações de gás na mistura, observa-se uma baixa considerável no desempenho da BCS podendo até ocasionar o fenômeno conhecido como *gaslocking*. Tal fenômeno faz com que a vazão de óleo seja nula, pois o gás livre ocupa a toda a área do rotor da bomba disponível para o escoamento de óleo.

Ao submeter um poço a uma vazão de sucção, para recuperação de óleo, o campo de pressão se propaga por todo o meio (óleo e gás). Devido ao fato do gás possuir uma maior mobilidade em relação ao óleo, o gás tende a fluir mais facilmente que o óleo em direção ao ponto de sucção. O fato do campo de pressão diminuir com o aumento da distância do ponto de sucção faz com que a pressão no gás próximo a metade horizontal do poço seja maior que na extremidades. Assim a superfície que separa os dois fluidos tende a formar uma depressão em direção ao ponto de recuperação de óleo como mostrado na figura 1.1.

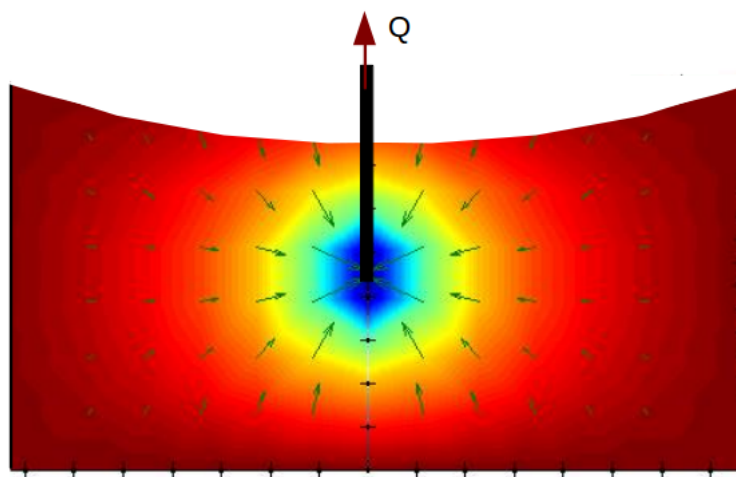


Figura 1.1: Modelo ilustrativo da influência do campo de pressão na superfície livre

O comportamento dinâmico da interface óleo-gás quando submetido a uma vazão de sucção visa estudar a reação da depressão, de acordo com as características do meio e as condições de extração, pois afeta o fator de recuperação final do óleo. Com essa informação a indústria será capaz de escolher a melhor vazão de produção entre uma vazão que seja menor que a vazão crítica que produzirá somente óleo por um longo período de tempo, ou uma alta vazão acima da crítica que ainda consiga produzir óleo de maneira rápida e

economicamente viável.

Outros trabalhos atacaram um problema semelhante porém utilizando outras ferramentas de solução das equações governantes, o método de Elementos de Contorno (MEC) ?? e o método hodográfico (ou transformações conformes) ??.

O trabalho [3] apresenta o desenvolvimento analítico em regime permanente, utilizando o método de transformações conformes (o método hodográfico). Já no trabalho [5] apresenta uma modelagem numérica do problema utilizando o método dos elementos de contorno (MEC).

A vantagem do método de diferenças finitas, que será utilizado no presente trabalho, em relação aos demais citados é que a modelagem pode ser feita para um sistema heterogêneo e anisotrópico. Além disso, por meio da similaridade dinâmica pode-se simular um meio isotrópico de dimensões muito grandes e que exigiriam um grande custo computacional para solução, através de um meio anisotrópico apenas variando a relação das condutividades hidráulicas e de forma muito mais rápida.

Outro mecanismo importante que pode ser afetado pela recuperação de gás juntamente com óleo, é conhecido como mecanismo da capa de gás. A extração de óleo no reservatório tem como principal fonte de energia, em muitos casos, a pressão existente dentro do reservatório. A medida que o óleo vai sendo extraído, a pressão interna do reservatório tende a diminuir. A queda de pressão é transmitida para a capa de gás (ilustrada na figura 1.2), que por sua vez se expande ocupando o espaço que antes havia fluido, reduzindo a queda de pressão. Portanto o fato do gás ser mais compressível que o óleo, mantém a pressão do reservatório. Portanto, a recuperação de gás juntamente com o óleo, reduz o efeito da capa de gás.

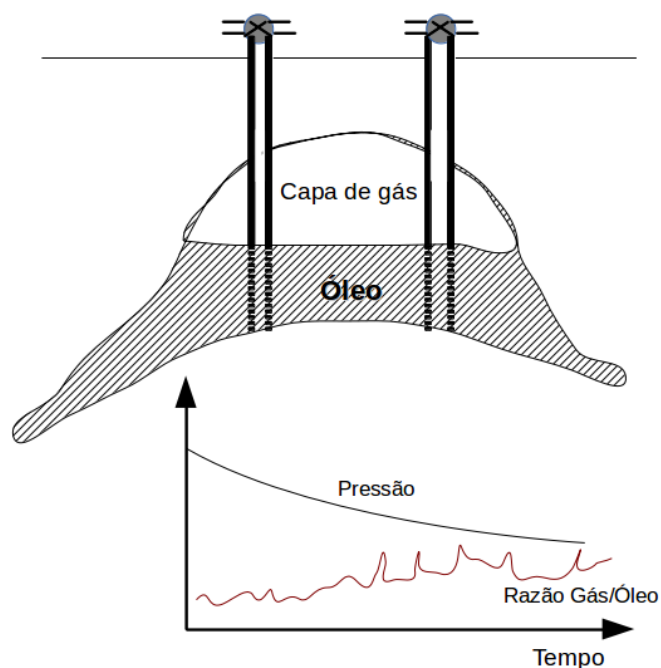


Figura 1.2: Modelo da capa de gás existente em alguns reservatórios naturais de óleo

1.1 Problema

Considera-se um meio natural poroso, homogêneo e estratificado de permeabilidade k constante. Este contém dois fluidos imiscíveis de densidades distintas sujeitos inicialmente apenas a forças gravitacionais. A camada inferior do meio está saturada pelo fluido mais denso, nesse caso óleo. Acima do óleo existe apenas o fluido menos denso, neste caso gás. Tem-se então uma interface óleo-gás. A condição de fronteira lateral é simétrica para os dois lados e representa um perfil de velocidade de óleo constante entrando no reservatório.

Ao adicionar um sumidouro de vazão de sucção de óleo Q constante, como ilustra a figura (1.3), forças viscosas farão com que a superfície livre responda de maneira a formar uma depressão dirigida para o ponto de sucção. Para que seja extraído apenas óleo do sumidouro, é preciso determinar a vazão máxima que pode ser imposta, antes que a superfície livre fique abaixo do ponto de sucção. A partir desse ponto o gás será extraído juntamente com o óleo.

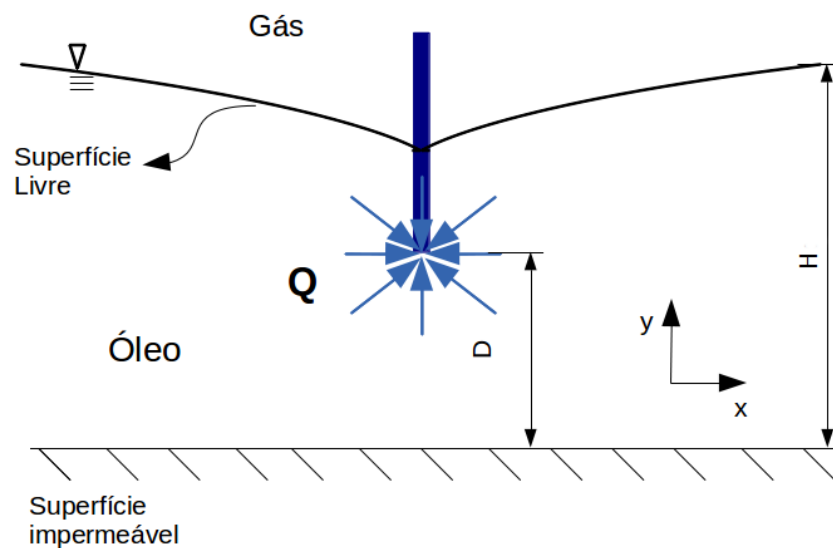


Figura 1.3: Modelo representativo do problema, interface óleo-gás em meio poroso

Este trabalho tem o objetivo, portanto, de agrupar conhecimentos da indústria do petróleo, de engenharia mecânica, matemáticos e computacionais para representar o comportamento da interface gás-óleo em um meio poroso submetido a uma vazão de sucção.

Será utilizada uma solução numérica baseada no método de diferenças finitas para a solução das equações que governam o escoamento no meio poroso submetido a sucção. Espera-se obter um modelo bidimensional que represente a reação do poço em regime permanente, quando submetido a uma vazão de extração de fluido.

1.1.1 Objetivos específicos

- Modelar o escoamento bidimensional em meio natural através de equações matemáticas.
- Definir equações Governantes e condições de contorno.
- Implementar método de diferenças finitas para solução da equação de Darcy.

- Definir parâmetro adimensional para problema através da adimensionalização das equações governantes.
- Apresentar método iterativo para solução das equações governantes.
- Apresentar solução analítica pela aproximação de Dupuit.
- Verificar o método de diferenças finitas na equação de Darcy para solução da Hipótese de Dupuit.
- Incluir inclusões impermeáveis ao método de diferenças finitas.
- Apresentar a similaridade dinâmica existente entre meios naturais isotrópicos e anisotrópicos.
- Verificar resultados obtidos com resultados experimentais em uma célula de Hele-Shaw.
- Verificar a influência das dimensões de um poço tendendo ao infinito $L/H \rightarrow \infty$
- Apresentar os resultados obtidos juntamente com uma análise.

2

Equações governantes

Será utilizada, como equação que descreve o movimento de fluidos em meios naturais, a Lei de Darcy, publicada em 1856 por Henry Darcy [1], embasada em resultados de estudos e experimentos sobre o fluxo de água através de leitos de areia. Para um fluido de viscosidade μ e densidade ρ em um meio poroso homogêneo de permeabilidade k , a velocidade do escoamento \mathbf{u} pode ser relacionada a pressão p por:

$$-\nabla p - \frac{\mu}{k} \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} = 0. \quad (2.1)$$

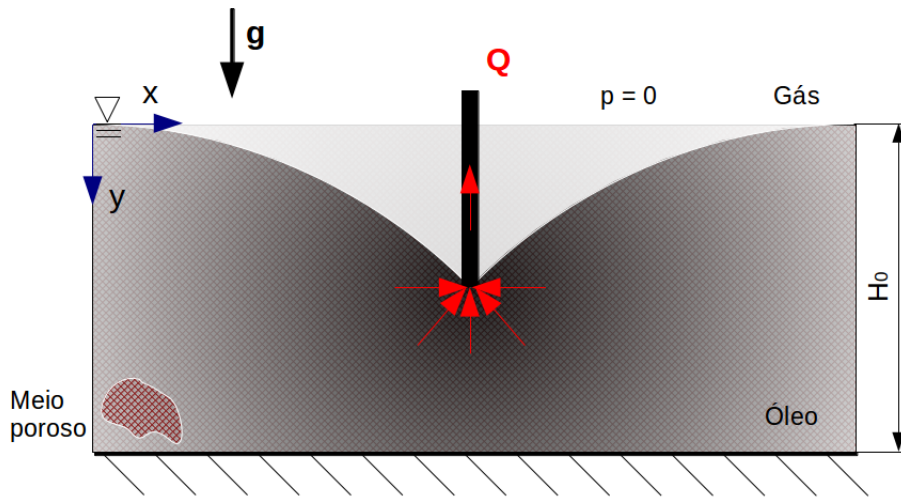


Figura 2.1: Definição do problema para escoamento em meio poroso bidimensional

Pode-se escrever o vetor gravidade \mathbf{g} em termos de um potencial gravitacional χ . Isso leva a:

$$\mathbf{g} = -\nabla \chi \quad (2.2)$$

$$\chi = gy \quad (2.3)$$

$$\nabla \chi = \nabla(gy) = g \nabla y = g \mathbf{e}_y, \quad (2.4)$$

onde g é a aceleração da gravidade.

Substituindo na Lei de Darcy:

$$\frac{\mu}{k} \mathbf{u} = -\nabla p - \nabla(\rho gy) = -\nabla(p + \rho gy) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{u} = -\nabla\left[\frac{k}{\mu}(p + \rho gy)\right] \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u} = -\frac{k\rho g}{\mu}\nabla\left(\frac{p}{\rho g} + y\right). \quad (2.7)$$

De forma completa:

$$\mathbf{u} = -K\nabla\phi, \quad (2.8)$$

onde

$$\phi = \frac{p}{\rho g} + y \quad (2.9)$$

é a altura piezométrica e

$$K = \frac{k\rho g}{\mu} \quad (2.10)$$

K é a condutividade hidráulica.

2.1 Parâmetro adimensional

Utilizando o princípio de conservação da massa, pode-se dizer que para um fluido incompressível escoando em um volume de controle fixo e saturado de fluido, a diferença entre a quantidade de massa que entra no volume de controle é igual a que sai. Portanto, supondo que o ponto de sucção de fluido (de vazão Q) está localizado em \mathbf{x}_0 , a conservação da massa pode ser escrita matematicamente como

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -Q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (2.11)$$

para $Q > 0$, onde $\delta(x)$ é o delta de Dirac tridimensional.

Substituindo \mathbf{u} da lei de Darcy (equação 2.8) na equação da conservação da massa (equação 2.11), observa-se que a altura piezométrica ϕ obedece a equação:

$$\nabla^2\phi = -\frac{Q}{K}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (2.12)$$

A superfície que separa os dois fluidos será então uma função das coordenadas cartesianas x e y e do tempo, e será representada por:

$$y = \eta(x, t). \quad (2.13)$$

A partir da condição de contorno dinâmica que diz respeito a superfície abrupta que separa os dois fluidos, pode-se dizer que a pressão é contínua em toda interface de separação, ou seja:

$$p^{superior} = p^{inferior} \quad \text{em } y = \eta(x, t). \quad (2.14)$$

No estado de equilíbrio, o óleo está submetido a um gradiente de pressão dado pela composição do campo gravitacional e o escoamento agindo sobre óleo. Assume-se aqui que a pressão existente na camada com gás é constante e nula, assim desconsiderando os efeitos viscosos que poderiam aparecer entre os dois fluidos. Matematicamente essa condição de contorno pode ser escrita por:

$$g\eta(\rho_D - \rho_d) + P = 0 \quad \text{em } y = \eta(x, t), \quad (2.15)$$

onde os subscritos D e d representam os fluidos mais denso (óleo) e menos denso (gás) respectivamente e P é a pressão no ponto em análise.

Para facilitar a caracterização do fluido e as equações do escoamento é importante adimensionalizar as equações. Para isso usando H como uma escala característica de comprimento pode-se escrever:

$\frac{Q}{H^2}$ escala característica de velocidade que governa (2.8);
 $\frac{Q\mu}{Hk}$ como escala de pressão, retirada da substituição escala característica de velocidade na equação (2.8). Onde nesse caso μ é a viscosidade do fluido que está sendo retirado.

A condição de contorno dinâmica (2.15) em termos de variáveis adimensionais nos leva a:

$$\eta^* + FP^* = 0 \quad em \quad y^* = \eta^*(x^*) \quad (2.16)$$

onde η^* , P^* , x^* , y^* e z^* são números adimensionais que representam η , P , x , y e z respectivamente. A outra variável,

$$F = \frac{Q\mu}{kH^2(\rho_D - \rho_d)g} \quad (2.17)$$

é o parâmetro adimensional procurado, definido aqui como número de Froude (F). Tal número relaciona as forças viscosas às forças gravitacionais que agem sobre o escoamento. Sob os pressupostos subjacentes ao modelo, F é o único parâmetro adimensional necessário para a especificação da forma da superfície livre em regime permanente para escoamentos geometricamente semelhantes. Ele fornece os critérios de similaridade dinâmicos para a comparação entre a teoria, simulações de computador e experimentos.

O número de Froude(F), para um escoamento bidimensional com uma diferença muito grande de densidades entre os fluidos (ou seja $\rho_D - \rho_d \approx \rho_D$), pode ser escrito na forma:

$$F = \frac{Q}{KH} \quad (2.18)$$

que será utilizada no presente trabalho.

2.2 Formulação do problema

O meio poroso bidimensional de altura H e largura L é definido a partir das coordenadas cartesianas. Como descrito anteriormente o meio é homogêneo, inicialmente isotrópico (ou seja, a permeabilidade k é igual e constante nas direções x e y), possui a superfície inferior impermeável e a superfície superior livre. O sistema é estratificado e dividido por dois fluidos imiscíveis sujeitos inicialmente apenas a forças gravitacionais fazendo, portanto, com que o fluido mais denso (óleo) esteja abaixo do fluido menos denso(gás) e sature a parte inferior do meio poroso.

O meio é então submetido a uma vazão de sucção de óleo constante Q representada por um sumidouro pontual inserido em posição pré determinada no meio em análise. O óleo está submetido agora a: pressão p_0 da superfície do gás, as forças gravitacionais e as forças viscosas que atuam devido a sua extração.

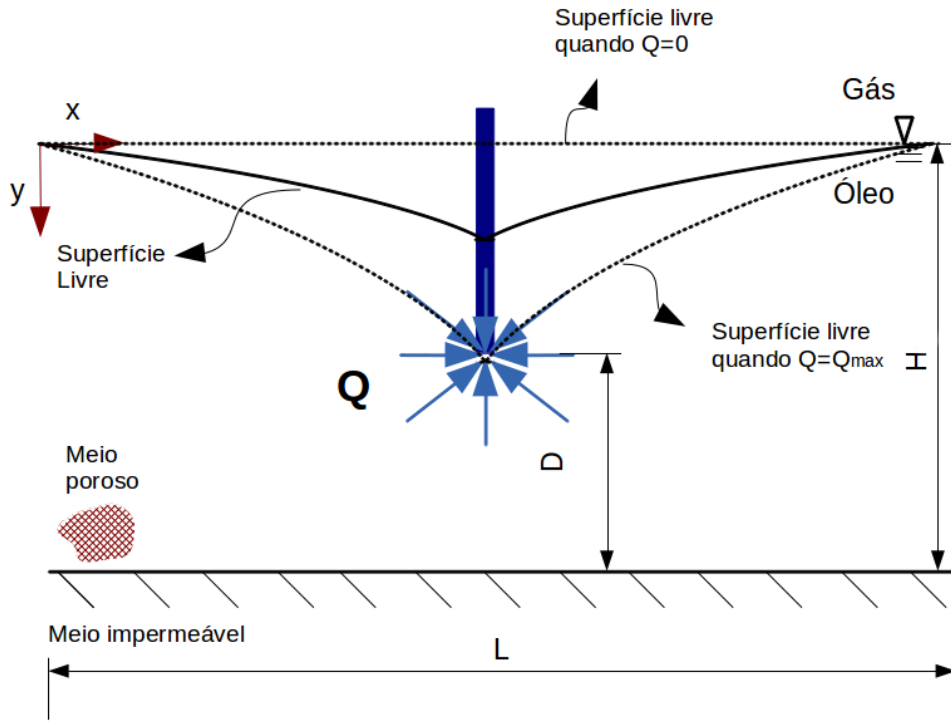


Figura 2.2: Formulação do problema

Para caracterizar o escoamento do óleo usa-se:

- A Equação (2.8):

$$\mathbf{u} = -K \nabla \phi.$$

- A condição de contorno dinâmica descrita pela Equação (2.15):

$$g\eta(\rho_D - \rho_d) + P = 0 \quad \text{em } y = \eta(x).$$

- A condição de contorno de impenetrabilidade para representar a inexistência de fluxo de fluido pelo meio impermeável pertencente a superfície inferior do poço. Pode-se representar matematicamente:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (2.19)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal à superfície impermeável.

- Considera-se também como condição de contorno que a pressão p_0 é constante e nula para o meio onde se encontra o gás.

3

Método de Diferenças Finitas

As equações diferenciais utilizadas para resolver o problema são válidas para meios contínuos. Porém o método utilizado para resolvê-las analisa o meio discretamente, ou seja, ponto a ponto. Por isso as derivadas das equações serão aproximadas por expansões em séries de Taylor e comparadas com pontos vizinhos.

Esta seção descreve a essência de um método simples de diferenças finitas (baseado no artigo [2]) para resolver um problema bidimensional de superfície livre com um único fluido. A partir da equação governante de Darcy e da condição de contorno de pressão, pode ser escrito que:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \cdot [\nabla p' + \Theta(p') \nabla y], \quad (3.1)$$

onde $p' = \frac{p}{\rho g}$.

Aqui \mathbf{K} é o tensor condutividade hidráulica, que representa a condutividade hidráulica K (eq. 2.10) para as direções de escoamento x e y . Supõe-se que a pressão é constante e nula apenas no gás, imposta como condição de contorno, pode-se identificar a interface entre os dois fluidos, introduzindo uma função degrau que se comporta da seguinte maneira:

$$\Theta(p') = \begin{cases} 1 & \text{se } p' > 0, \\ 0 & \text{se } p' < 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Tal função é chamada Função *Heaviside*.

O conjunto de equações de diferenças finitas para o campo de pressão p' pode ser obtido pela integração da equação (2.11) sobre o volume de controle definido pela superfície de controle analisada. Matematicamente :

$$\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = -Q \int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}. \quad (3.3)$$

A figura 3.1 ilustra o método.

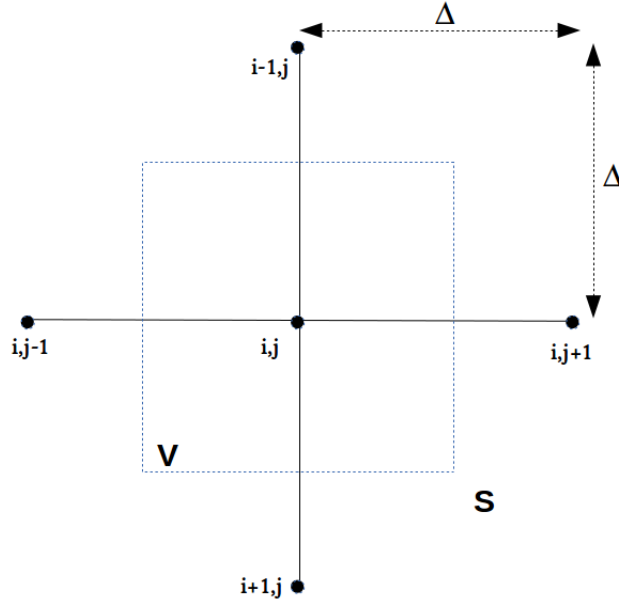


Figura 3.1: Modelo utilizado para construção da malha pelo método de diferenças finitas

Para um volume fechado que englobe o ponto \mathbf{x}_0 (o ponto de sucção), a integral de volume da equação (3.3) é igual a unidade. Isso significa que a quantidade de fluido que atravessa a superfície fechada S é igual a quantidade de fluido retirado a uma vazão Q .

O sistema descrito acima pode ser diretamente estendido para o problema em questão. Para isso é preciso substituir a velocidade do escoamento \mathbf{u} dada pela Lei de Darcy para um meio poroso isotrópico em (3.1) na equação (3.3).

3.1 Equações de diferenças finitas

Inicialmente, para um problema anisotrópico tem-se que o tensor da condutividade hidráulica \mathbf{K} (eq. 2.10) é função da direção do escoamento já que depende da permeabilidade k do meio. Portanto, será representada por:

$$\mathbf{K} = \text{diag}(K_x, K_y), \quad (3.4)$$

em que K_x e K_y são as condutividades hidráulicas nas direções x e y respectivamente.

As equações adimensionais geradas a partir da Eq.(3.3), para o campo de pressão p' (definido anteriormente na Eq. (3.1), e que a partir de agora será representado apenas por p) usando o método de diferenças finitas e as condições de contorno pré estabelecidas para uma malha uniformemente espaçada por uma distância Δ (de acordo com a Fig. (3.1)) sobre a superfície de controle fechada é:

$$p_{i,j} = \frac{1}{2(1+\lambda)} [p_{i,j-1} + p_{i,j+1} + \lambda(p_{i-1,j} + p_{i+1,j})] + \frac{\Delta}{2(1+\lambda)} \left[\Theta_\epsilon \left(\frac{p_{i,j} + p_{i,j+1}}{2} \right) - \Theta_\epsilon \left(\frac{p_{i,j} + p_{i,j-1}}{2} \right) \right] \quad (3.5)$$

onde nesse caso $\lambda = \frac{K_x}{K_y}$ é o coeficiente de anisotropia. Nessa equação desconsidera-se a existência do ponto de sucção.

Para um cálculo numérico, a função Heaviside Θ foi reescrita como uma função rampa Θ_ϵ definida por:

$$\Theta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > \varepsilon, \\ \frac{x}{\varepsilon} & \text{se } x < \varepsilon. \end{cases} \quad (3.6)$$

Onde $\varepsilon \approx \Delta$.

Uma equação que descreva apenas a condição de contorno de impenetrabilidade do fundo é necessária e pode ser escrita por:

$$p_{i,j} = \frac{1}{1+\lambda} \left[p_{i,j+1} + \frac{\lambda}{2} (p_{i-1,j} + p_{i+1,j} + \Delta) \right]. \quad (3.7)$$

A equação que considera o ponto de sucção é dada por:

$$p_{i,j} = \frac{1}{2(1+\lambda)} [p_{i,j-1} + p_{i,j+1} + \lambda(p_{i-1,j} + p_{i+1,j})] + \frac{\Delta}{2(1+\lambda)} \left[\Theta_\varepsilon \left(\frac{p_{i,j} + p_{i,j+1}}{2} \right) - \Theta_\varepsilon \left(\frac{p_{i,j} + p_{i,j-1}}{2} \right) \right] - \frac{F}{4}, \quad (3.8)$$

onde F nesse caso é o Número de Froude efetivo dado por:

$$F = \frac{Q}{H\bar{K}} \quad \text{onde } \bar{K} = \frac{K_x + K_y}{2}. \quad (3.9)$$

O método iterativo consiste em:

- primeiramente arbitrar um valor inicial de pressão para cada ponto da malha.
- Para acelerar o processo de convergência utilizou-se o método *SOR* (Successive Over-Relaxation) que consiste em um método de solução de sistemas de equações lineares, que calcula a média ponderada entre a iteração atual e a sua antecessora. Matematicamente pode-se descrever o método *SOR* por:

$$x_{i,j}^{(n)} = \omega \bar{x}_{i,j}^{(n)} + (1 - \omega) x_{i,j}^{(n-1)},$$

onde:

- \bar{x} é a média ponderada das iterações;

- ω é o fator de relaxação, que deve ser escolhido entre os valores $1 > \omega > 2$ a fim de acelerar a taxa de convergência das iterações.

- Para cada iteração n o programa compara a diferença S de resultados entre a iteração anterior até que a diferença seja menor ou igual a um erro pré definido, que neste caso é 10^{-3} . Ou seja:

$$S^{(n)} = \sum_{i,j} |p_{i,j}^{(n)} - p_{i,j}^{(n-1)}| < 10^{-3}. \quad (3.10)$$

Quando a condição imposta pela equação (3.10) for atingida, o programa finaliza os cálculos.

Para a solução do problema tridimensional o método de diferenças finitas é descrito no apêndice A

4

Testes preliminares

Inicialmente será analisada uma situação em que não há vazão de sucção. O escoamento é induzido unicamente pela gravidade, separando dois reservatórios com níveis diferentes de altura, por um meio poroso bidimensional. A figura (4.1) ilustra o modelo utilizado.

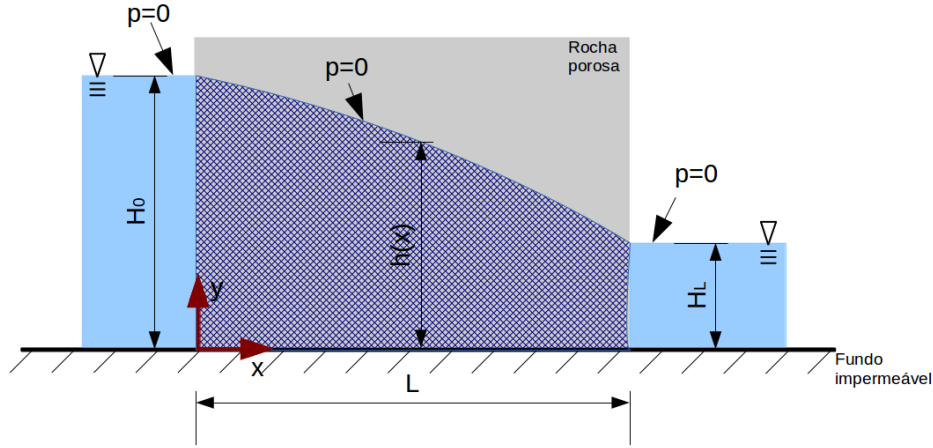


Figura 4.1: Modelo de escoamento por infiltração

A equação analítica para solução desse problema é não linear, por isso foi utilizada a aproximação de Dupuit que consiste em:

- Para um escoamento permanente em meio poroso bidimensional, sensivelmente horizontal onde a declividade da superfície livre é suave, a direção do vetor velocidade de escoamento é horizontal. Ou seja, a componente vertical da velocidade é nula. Matematicamente isso se traduz a:

$$u = -K \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (4.1)$$

em que $h(x)$ é a altura da superfície livre.

Assumindo a vazão como constante, tem-se:

$$Q = u(x)h(x) = -Kh \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (4.2)$$

Usando KH_0 como escala característica de vazão e H_0 como escala característica de comprimento podemos resolver a equação (4.2) para $x = L \rightarrow h(x) = H_L$. Isolando Q , temos:

$$Q = \frac{K}{2L}(H_0^2 - H_L^2). \quad (4.3)$$

Para os valores de $H_0^* = 1$, $H_L^* = 0.5$, e $L^* = 1$ (onde o sobrescrito $*$ indica que são parâmetros adimensionais), tem-se que o valor adimensional da vazão de Dupuit é $Q^* = 0.375$.

Comparando as vazões de fluido obtida pela aproximação de Dupuit e a obtida pelo método de diferenças finitas, é possível ter uma noção sobre validade dos resultados obtidos pelo código numérico utilizado no trabalho. Tanto para os escoamentos isotrópicos ou anisotrópicos, confinados ou abertos, uma linha de fluxo pode ser calculada utilizando a função de corrente ψ , obtida diretamente por:

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4.4)$$

$$u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.5)$$

A quantidade de fluido que atravessa um elemento de lados infinitesimais dx e dy é:

$$dQ = u_x dy - u_y dx = d\psi. \quad (4.6)$$

Portanto o fluxo ΔQ que atravessa dois pontos adjacentes (i, j) $(i+1, j)$ é igual a :

$$\Delta Q = \int_{i+1,j}^{i,j} u_x dy = \frac{K_x}{4}(p_{i,j+1} - p_{i,j-1} + p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j-1}) = \Delta\psi = \psi_{i,j} - \psi_{i+1,j}. \quad (4.7)$$

Para os mesmos valores usados na vazão de Dupuit tem-se que para o método de Diferenças finitas a média aritmética calculada é $Q = 0.376$. O resultado é muito próximo ao calculado pelo método analítico.

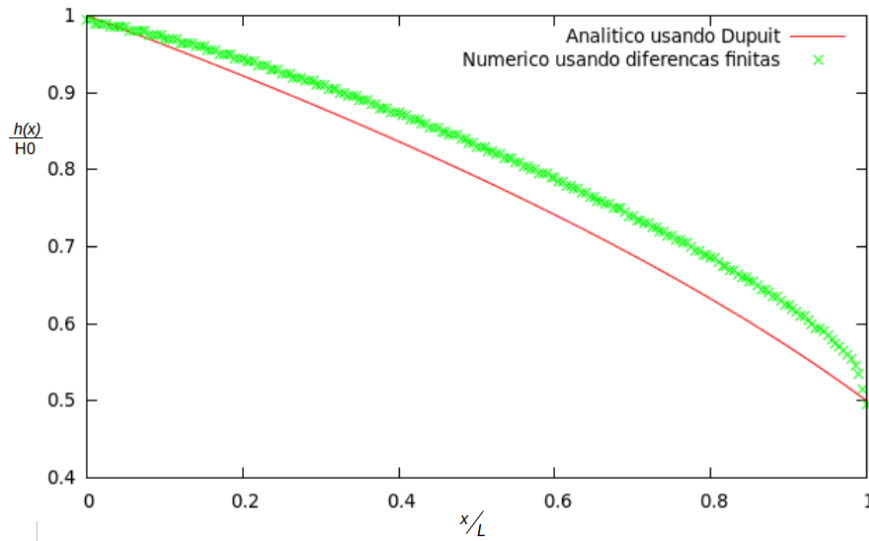


Figura 4.2: Forma da superfície livre (problema ilustrado na figura 4.1)

A figura (4.2) compara o resultado analítico (obtido utilizando a aproximação de Dupuit) e numérico (utilizando o método de diferenças finitas descrito neste trabalho).

Pode-se observar pela fig.(4.2), que representa a forma da superfície livre para os dois resultados, que no resultado obtido numericamente (em verde) a superfície livre tem uma curva suave até próximo ao lado direito do reservatório, porém existe uma inclinação muito grande da superfície livre próximo a $\frac{x}{L} = 1$. Fisicamente isso é justificável já que devido às características do reservatório o fluido escoava por ele e chega ao outro lado com uma altura diferente de H_L . Nesse caso o gráfico nos mostra que o fluido chegou a uma altura acima de H_L e escorreu pela parede do reservatório quando $\frac{x}{l} = 1$, ou seja, ele não estava mais dentro da rocha, ele escoava entre a rocha e o meio externo tendo apenas velocidade vertical. Essa superfície livre escorrendo sobre o reservatório é denominada *seepage face* [1]. Para o resultado analítico em vermelho, devido a aproximação de Dupuit, a superfície livre acaba exatamente na altura de H_L pois desconsideramos a velocidade vertical do escoamento.

Para validação dos resultados pode-se comparar as vazões encontradas pelos dois métodos visto que é possível mostrar que mesmo com a hipótese de Dupuit a vazão encontrada é exata [1].

Resultados 5

Problema com sumidouro

Os resultados obtidos na figura (5.1), levam em consideração as seguintes hipóteses:

- o fundo do reservatório é impermeável;
- existe um perfil de velocidade simétrico de óleo entrando nas laterais do poço;
- a largura e altura adimensionais do poço são unitárias;
- o ponto de sucção encontra-se no ponto de meia altura e meia largura;
- a pressão na camada de gás (acima da superfície livre) é constante e nula;
- avalia-se tanto o caso isotrópico como o caso anisotrópico;
- apenas varia-se o número de Froude.

Partindo das condições de contorno inicialmente propostas e apenas variando o Número de Froude nas equações a fim de encontrar o caso crítico de sucção (quando o gás começa a ser extraído juntamente com o óleo), são apresentados a seguir:

A figura(5.1) apresenta resposta da superfície livre para quatro valores de Froude para o caso anisotrópico($k_x = 10k_y$ ($F = 1.05, F = 1.40, F = 1.45, F = 1.50$), e para o caso isotrópico (a permeabilidade em x é igual a permeabilidade em y) temos $F = 1.05$. Existem dois casos de colapso observados neste gráfico, o primeiro quando existe a formação do *cusp* que seria uma depressão com um ponto de singularidade (observado nos casos de $F = 1.45$ e $F = 1.5$); o segundo caso ocorre quando a interface óleo-gás fica abaixo do ponto de sucção (caso em que $F=1.5$). Além disso é possível constatar que para o caso anisotrópico com $F = 1.05$ a depressão é maior que para o caso isotrópico com o mesmo Froude.

Um segundo gráfico que pode ser obtido com o mesmo código numérico relaciona as superfícies livres para diferentes Froudes de reservatórios com dimensões diferentes.

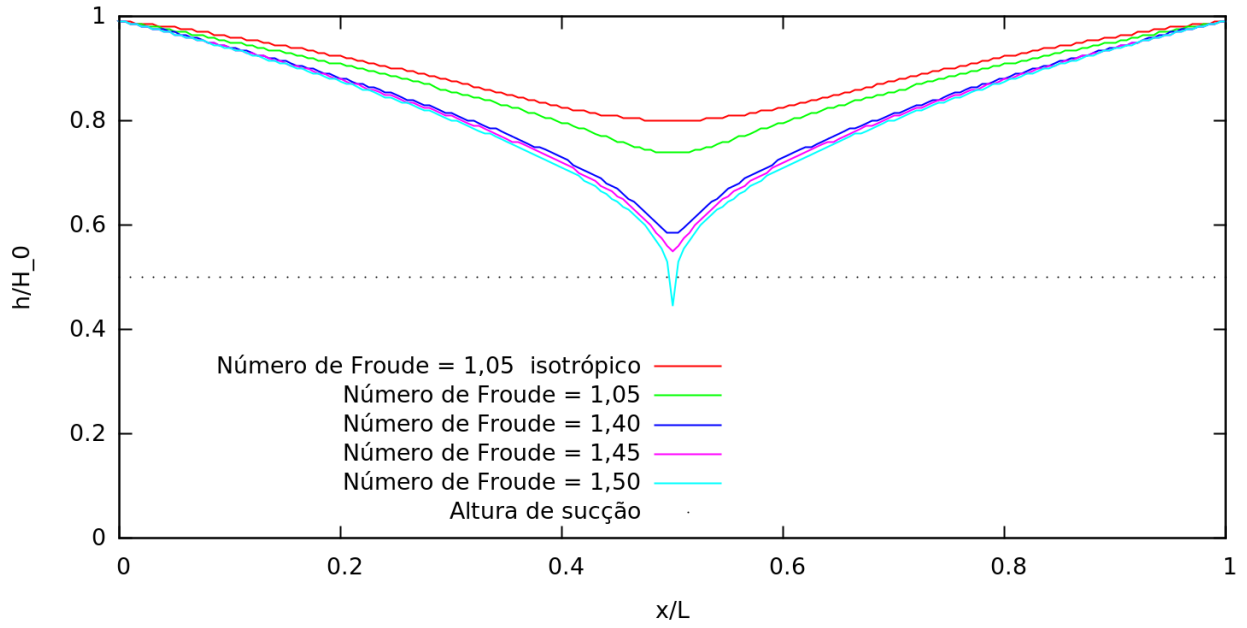


Figura 5.1: Forma da superfície livre em função do número de Froude (problema ilustrado na figura (2.1))

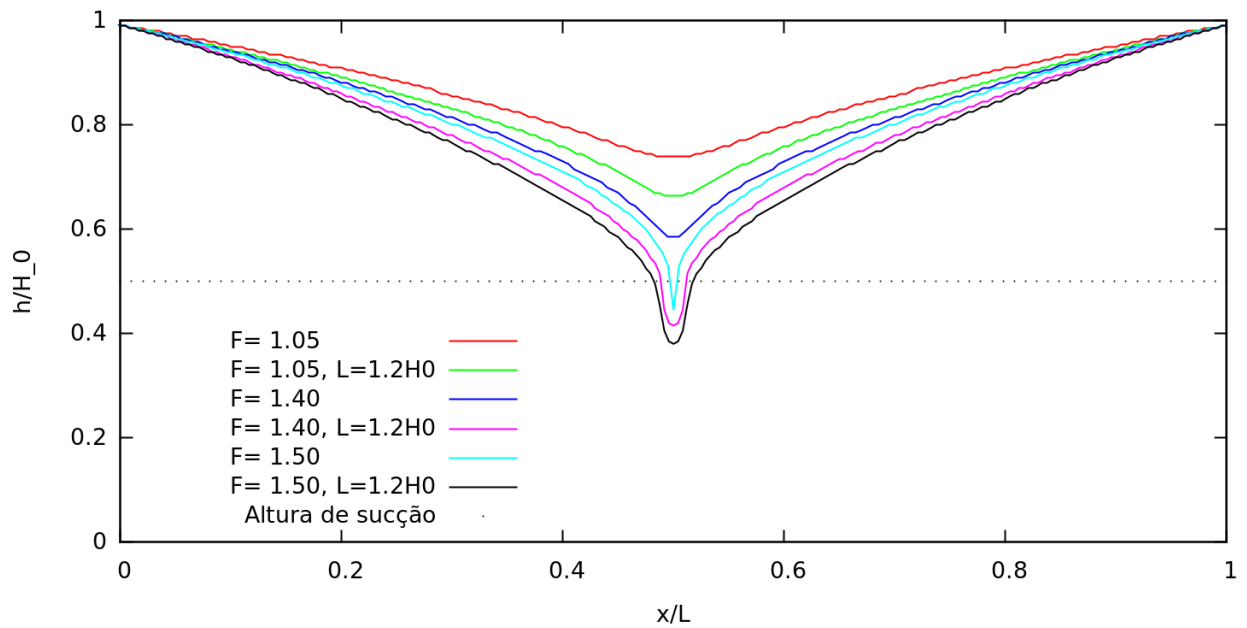


Figura 5.2: Forma da superfície livre em função da dimensão do reservatório

Neste gráfico as linhas verde, azul claro e preta representam a resposta da superfície livre para um meio com largura $L = 1.2H_0$, para as demais curvas $L = H_0$. É possível notar que com o aumento do número de Froude a superfície colapsa, da mesma forma como observado na Figura (5.1). Porém para um mesmo Froude a superfície do meio com largura $L = 1.2H_0$ responde mais sensivelmente ao Froude.

Com auxílio das figuras (5.1) e (5.2) foi possível observar uma relação entre o colapso e:

- a permeabilidade do meio → para o caso anisotrópico foi usada uma permeabilidade

horizontal dez vezes maior que a permeabilidade vertical, e este respondeu com um Froude crítico menor que para o caso isotrópico onde a permeabilidade horizontal é igual a permeabilidade vertical.

- as dimensões do poço \rightarrow para o caso em que somente a largura do poço é maior observa-se que o Froude crítico é menor.

Ou seja, podemos simular um poço de dimensões maiores apenas variando sua permeabilidade k . Assim o custo computacional do código é reduzido significativamente pois a quantidade de pontos analisados pode permanecer a mesma para diferentes poços.

5.1 Relações entre soluções para problemas de escoamento em meio isotrópico e anisotrópico

Foi observado que, para a solução do código numérico para os casos isotrópico e anisotrópico analisados para um reservatório de dimensões fixas, o tempo e o número de iterações necessárias para obter a condição imposta por (3.10) é muito menor no primeiro caso. Assim de acordo com [1] podemos modelar um meio anisotrópico como um meio isotrópico (fazendo as alterações necessárias, que serão mostradas posteriormente) e chegar aos mesmos resultados, porém com um número de iterações diferentes. Nesse sentido deseja-se analisar a similaridade dinâmica entre os casos anisotrópico e isotrópico.

Similaridade Dinâmica

Supondo portanto:

- um meio isotrópico, onde a relação largura *versus* altura é igual a $L/H = \alpha$, e a condutividade hidráulica é igual a K .
- um meio anisotrópico, onde a relação largura *versus* altura é igual a 1, e tensor condutividade hidráulica \mathbf{K} é dada por:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{pmatrix}$$

A figura 5.3 ilustra esquematicamente as duas situações.

Hipóteses:

- o espaçamento Δ utilizado pelo método de diferenças finitas (Fig.3.1) não se altera, e é igual para os dois casos. Ou seja, $d_x = d_y = \Delta$;
- a altura dos poços isotrópico e anisotrópico é igual, portanto a relação entre as larguras dos poços isotrópico *versus* anisotrópico é igual a $\frac{L_{isotrópico}}{L_{anisotrópico}} = \alpha$;

Para o mesmo espaçamento de pontos da malha (ou seja, o mesmo Δ) o poço isotrópico terá uma quantidade de nós em sua malha maior que a do poço anisotrópico, assim a quantidade de cálculos necessários também será maior. O objetivo é, portanto, utilizar um meio anisotrópico com $\alpha = 1$ para simular um meio isotrópico ($\alpha > 1$) resultando em uma mesma superfície livre.

Para uma melhor interpretação dos resultados obtidos, será feita uma análise matemática da similaridade dinâmica entre os dois casos mantendo as hipóteses assumidas anteriormente.

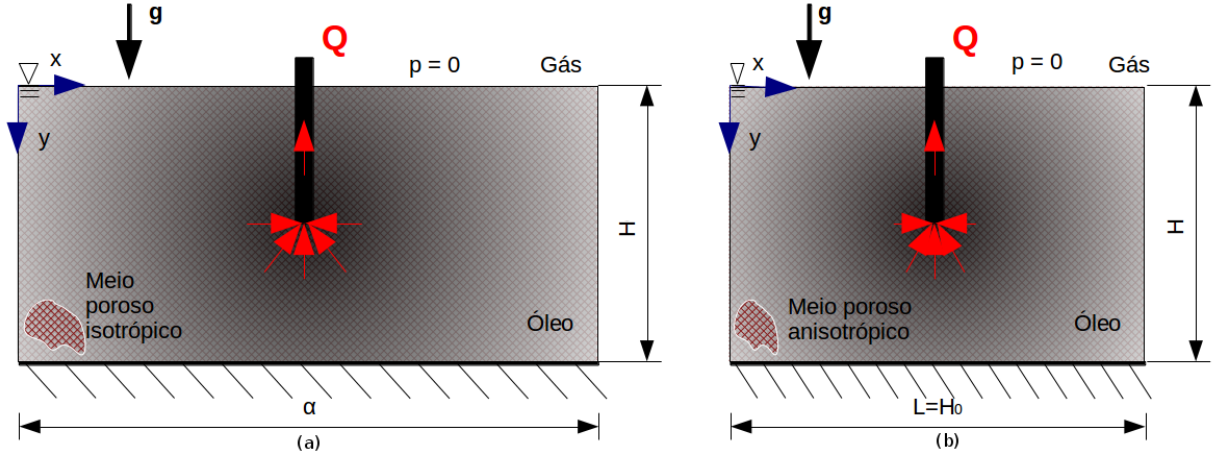


Figura 5.3: Ilustração dos meios (a) isotrópico e (b) anisotrópico

a). Problema isotrópico

De acordo com a Fig.(5.3(a)) pode-se definir as seguintes escalas características para o caso isotrópico:

- $\phi \sim H$
- $x \sim L$
- $y \sim H$

e assim a equação governante adimensionalizada, para o caso isotrópico, será:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{L^2}{H^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{-QL}{KH^2} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (5.1)$$

b). Problema anisotrópico

Da mesma maneira, de acordo com a Fig.(5.3(b)) pode-se definir as seguintes escalas características para o caso anisotrópico:

- $\phi \sim H$
- $x \sim H$
- $y \sim H$

e assim a equação governante adimensionalizada, para o caso anisotrópico, será:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{K_y}{K_x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{-Q}{K_x H} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (5.2)$$

Para que exista similaridade dinâmica entre os dois casos, as equações governantes adimensionalizadas [Eq.5.1 e Eq.5.2] devem ser as mesmas. Por isso, é necessário que:

$$\frac{K_y}{K_x} = \left(\frac{L}{H} \right)^2 \quad (5.3)$$

$$\frac{Q}{K_x H} = \frac{QL}{KH^2} \quad (5.4)$$

Para aplicar estes resultados nos programas de simulação numérica, de acordo com as Eq.5.1 e Eq.5.2, temos que:

Caso isotrópico

$$F_{iso} = \frac{Q}{HK} = \frac{H}{L} \left(\frac{QL}{H^2K} \right) \quad (5.5)$$

rearrumando a equação (5.5), temos:

$$\frac{QL}{H^2K} = \frac{L}{H} F_{iso} \quad (5.6)$$

Caso anisotrópico

$$F_{aniso} = \frac{Q}{H\bar{K}}, \text{ em que, } \bar{K} = \frac{K_x + K_y}{2} = \frac{1}{2}K_x \left[1 + \frac{K_y}{K_x} \right]$$

$$F_{aniso} = \frac{2}{1 + \frac{K_y}{K_x}} \left(\frac{Q}{HK_x} \right) \quad (5.7)$$

rearrumando a equação (5.7), tem-se:

$$\frac{Q}{HK_x} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{K_y}{K_x} \right] F_{aniso} \quad (5.8)$$

e utilizando as relação (2) e as equações (5.6) e (5.8). Chaga-se a uma relação entre números de Froude:

$$\frac{1 + \alpha^2}{2} F_{aniso} = \alpha F_{iso} \quad (5.9)$$

Portanto a simulação numérica de um problema isotrópico com $L/H = \alpha$ e um número de Froude igual a F_{iso} produzirá uma interface adimensionalizada.

$$\frac{y}{H} = \eta \left(\frac{x}{L} \right). \quad (5.10)$$

A mesma interface adimensionalizada será obtida com o programa anisotrópico se:

$$\frac{K_y}{K_x} = \alpha^2 \text{ e o número de Froude}$$

$$F_{aniso} = \frac{2\alpha F_{iso}}{1 + \alpha^2}$$

$$F_{aniso} = \frac{2\alpha F_{iso}}{1 + \alpha^2} \quad (5.11)$$

Para testar a equação 5.11, o código numérico foi utilizado primeiramente para duas situações.

1. **isotrópico**, com $H = 1$ e $L = 2 \rightarrow \alpha = 2$, e $F_{iso} = 0.1$;
2. **anistrópico**, com

$$\frac{K_x}{K_y} = \alpha^2 = 4$$
$$F_{aniso} = \frac{2(2)(0.1)}{1 + 2^2} = 0.08.$$

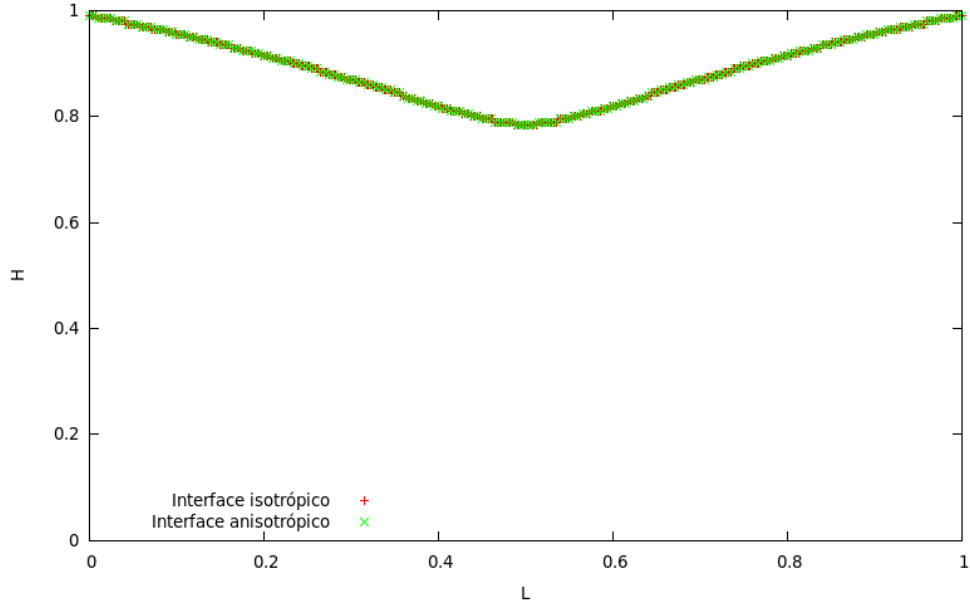


Figura 5.4: Similaridade dinâmica teórica entre meio Isotópico e Anisotrópico

Graficamente foi obtido o seguinte resultado(Fig. 5.4):

Pode-se observar que a partir dos dados do meio isotrópico, foi possível calcular o Froude equivalente para o caso isotrópico que gera a mesma superfície livre, porém neste caso os reservatórios isotrópico e anisotrópico possuem dimensões diferentes. A importância desse resultado vem do fato de o programa isotrópico precisou de 205000 iterações para convergir para um erro menor que 10^{-3} , em comparação com 127000 iterações do programa anisotrópico. Além disso cada iteração isotrópica é mais demorada pois a malha isotrópica possui mais pontos, do fato da largura ser maior.

Para isso foi montada a tabela 5.1, com resultados para diferentes valores de α . A partir da tabela 5.1 plotou-se o gráfico da figura 5.5.

$\lambda = L/H$	F_{iso}^c	$K_Y/K_X = \lambda^2$	F_{aniso}^c
1.5	0.871875	2.25	0.800000
2.0	0.612500	4.00	0.490625
2.5	0.481250	6.25	0.332812
3.0	0.403125	9.00	0.243359
3.5	0.346875	12.25	0.184375
4.0	0.306250	16.00	0.143750
4.5	0.273437	20.25	0.115625

Esta relação pode ser observada no gráfico da Fig.(5.5), onde foram comparados os gráficos de $(1 + \alpha^2)/(2\alpha)$ e da razão F_{iso}^c/F_{aniso}^c . Pode-se observar que os resultados obtidos numericamente para vários Froudes críticos para os dois casos, encontram-se com a curva dos resultados teóricos calculados.

Outra relação importante que é possível obter com os resultados numéricos é a do comportamento do Froude crítico para um poço que tenha $\alpha = (L/H) \rightarrow \infty$ ou $1/\alpha \rightarrow 0$. Ou seja, deseja-se obter a relação das características do poço com Froude crítico. A figura 5.6 ilustra esses resultados.

Observa-se que em sistemas isotrópicos quando os valores de L/H tendem para zero, ou seja reservatório infinito, o Froude crítico converge para um valor muito pequeno,

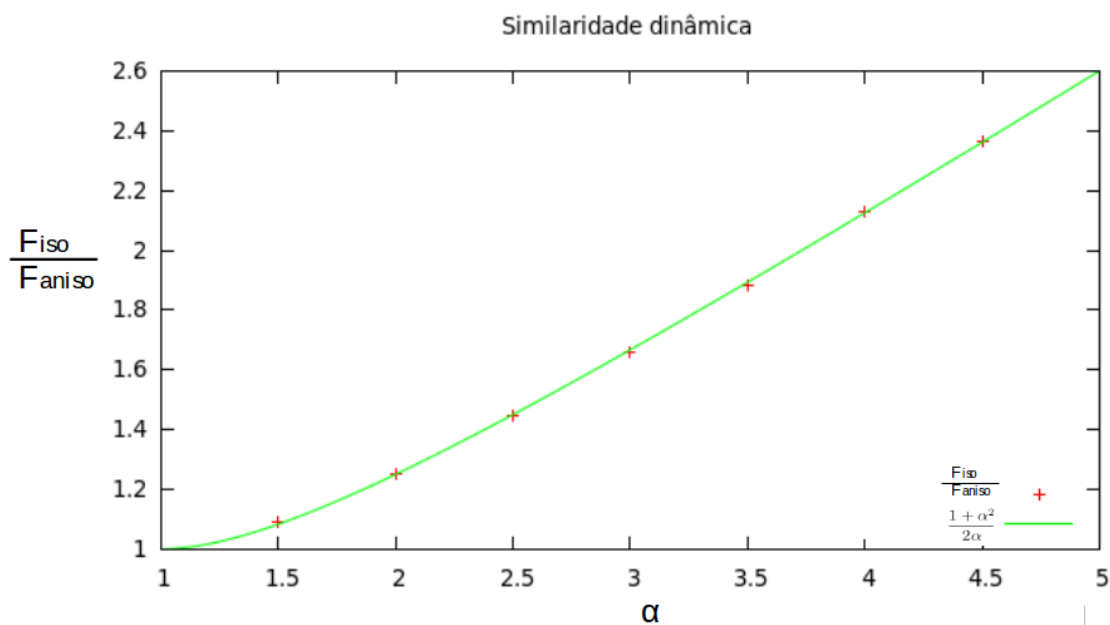


Figura 5.5: Comparação entre resultados e similaridade dinâmica teórica

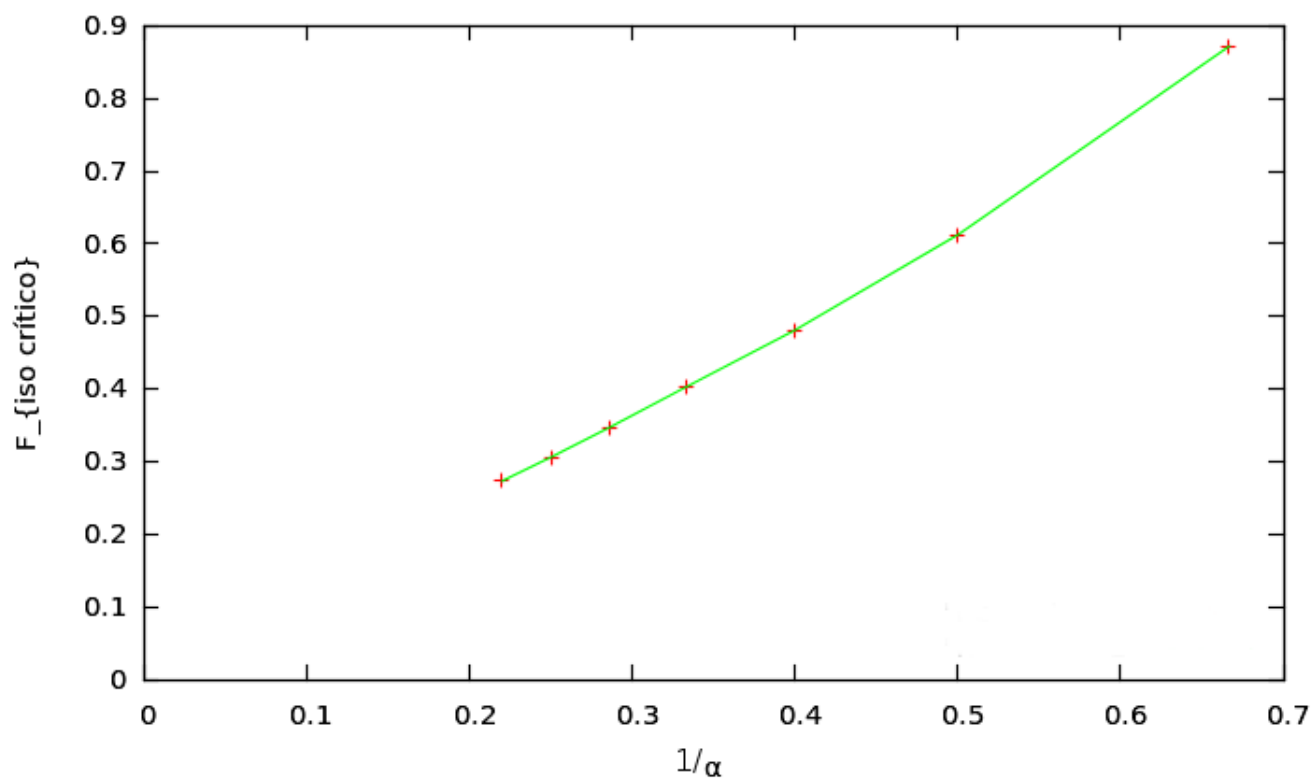


Figura 5.6: Extrapolação dos resultados para um meio infinito

mostrando existe em um certo limite até uma vazão de extração muito pequena formaria o cone crítico. É possível concluir daqui que, para meios isotrópicos infinitos sempre haverá colapso independente da vazão imposta.

Resultados 6

Testes entre código numérico e célula de Hele-Shaw

Para testar experimentalmente o código numérico será utilizada uma célula de Hele-Shaw que foi construída para o Projeto de graduação (em engenharia mecânica na UnB) de Morato M S e Domenici R P S. A célula de Hele-Shaw simula o escoamento bidimensional de fluidos em meios porosos a partir da injeção de fluido entre duas placas paralelas de áreas conhecidas. Neste trabalho a célula de Hele-Shaw foi utilizada para comparação dos resultados obtidos numericamente com resultados experimentais. A figura 6.1 ilustra a célula de Hele-Shaw.

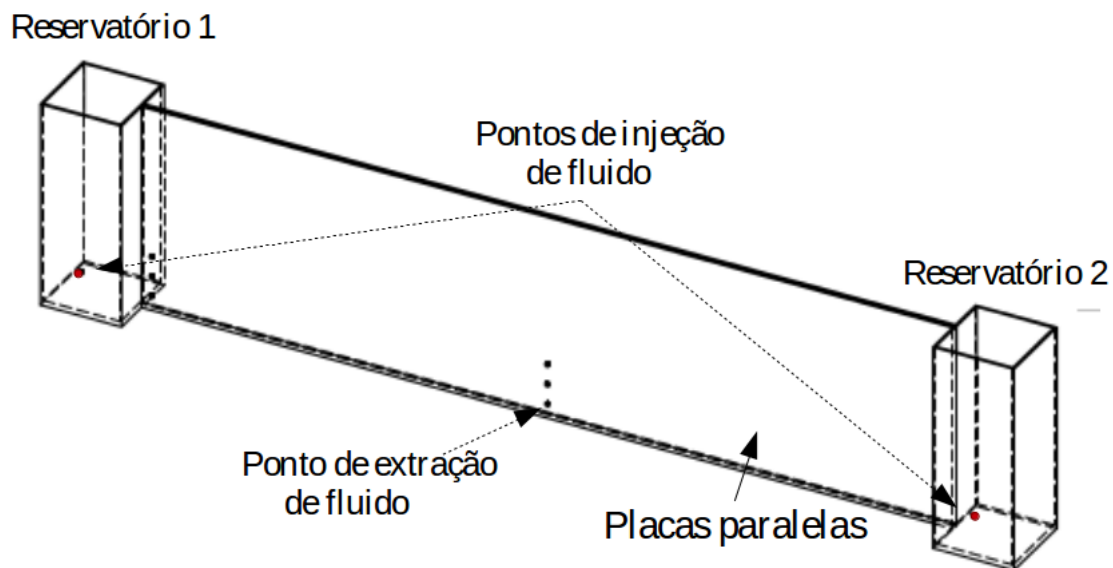


Figura 6.1: Modelo da célula de Hele-Shaw utilizada [3]

Desenvolveu-se assim, um protótipo de célula que simula o escoamento de fluido em um meio poroso bidimensional. As dimensões do protótipo são ilustradas na figura 6.4. Para a fabricação da célula e garantir o espaçamento de $4mm$ entre as placas paralelas (figura 6.1), foi necessário adicionar espaçadores circulares de raios $r = 24.5mm$ dispostos de acordo com a figura 6.2

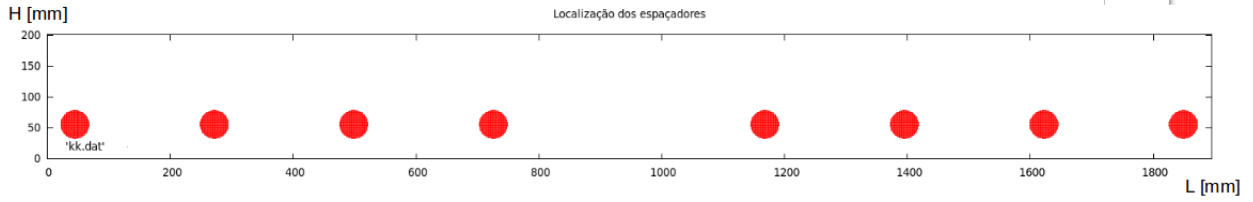


Figura 6.2: Disposição dos espaçadores na célula de Hele-Shaw

Para a realização do experimento as seguintes condições foram impostas:

- os reservatórios foram preenchidos com glicerina ($\mu = 0.51 Pa.s, \rho = 1255 Kg/m^3$) até uma altura $H = 212.1 mm$;
- três bombas de fluido foram adicionadas ao sistema;
- o ponto de sucção de fluido está localizado no centro longitudinal da célula ($L = 1000 mm$) e altura $c = 25 mm$ como ilustrado na figura 6.4;

Um resultado extremamente necessário para a análise do escoamento na célula de Hele-Shaw é a condutividade hidráulica média da célula.

Partindo da Eq. de Darcy, para uma célula de Hele-Shaw escoando fluido entre duas placas planas separadas por uma distância b , de acordo com as demonstrações do Apêndice C a condutividade hidráulica do meio pode ser calculada por:

$$K = \frac{\rho g b^2}{12\mu} \quad (6.1)$$

onde ρ é a massa específica do fluido, g é a gravidade, e μ é a viscosidade do fluido.

Por outro lado segundo [1], é possível a partir da hipótese de Dupuit (Eq. 4.3), chegar a uma equação para a condutividade hidráulica a partir de dados do experimento dados por:

$$K = \frac{2QL}{h_0^2 - h_L^2} \quad (6.2)$$

De acordo com experimentos feitos com a célula de Hele-Shaw [3], para o presente estudo, os resultados são:

- De acordo com a Eq.(6.1) $K = 3.22 \times 10^{-2} m/s$
- De acordo com a Eq.(6.2) $K = 7.51 \times 10^{-4} m/s$

A diferença nos resultados, como hipótese se deve ao fato de o cálculo da Eq.(6.1) não considerar a presença dos espaçadores, por outro lado, a Eq.(6.2) já os considera pois colhe os resultados do escoamento.

Para observar se a diferença também existe computacionalmente, foi feito um programa que simula o meio juntamente com inclusões impermeáveis (os espaçadores), e este foi comparado com a solução do programa para a mesma situação (tudo o mais constante), porém sem as inclusões impermeáveis. A figura 6.3 ilustra os resultados.

Os resultados mostram que, para um mesmo Froude, as superfícies respondem de maneira distinta de forma que o meio com inclusões impermeáveis responde mais sensivelmente a vazão imposta. Para melhor interpretação, de acordo com os resultados obtidos anteriormente temos que para a diminuição do inverso da razão de condutividades hidráulicas (K_y/K_x ou $1/K$) o Froude crítico é menor, ou seja, a superfície responde mais

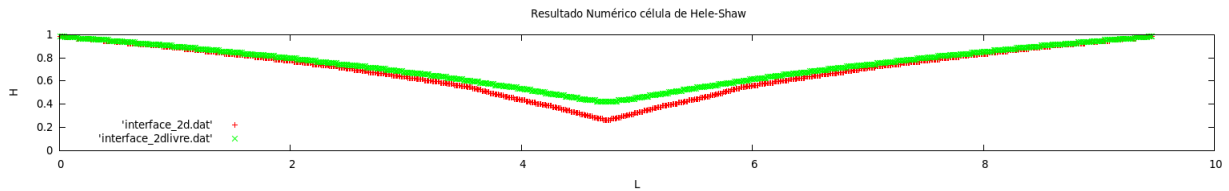


Figura 6.3: Efeito das inclusões impermeáveis no escoamento da célula de Hele-Shaw

sensivelmente aos meios com menor condutividade hidráulica, que é o caso do experimento com inclusões impermeáveis. Esse resultado também concorda com o resultado obtido pelas Eq. (6.1) e Eq.(6.2).

Para a realização dos experimentos com célula de Hele-Shaw, a fim de comparar os resultados com resultados numéricos, o equipamento foi submetido as seguintes condições:

-duas bombas, localizadas no centro longitudinal de cada reservatório a uma altura $c = 100mm$ como ilustrado na figura 6.1, que mantêm a altura H constante pela injeção variável de fluido (controlada computacionalmente); -a bomba de sucção varia a vazão até um máximo de $2.6 \times 10^{-5} m^3/s$

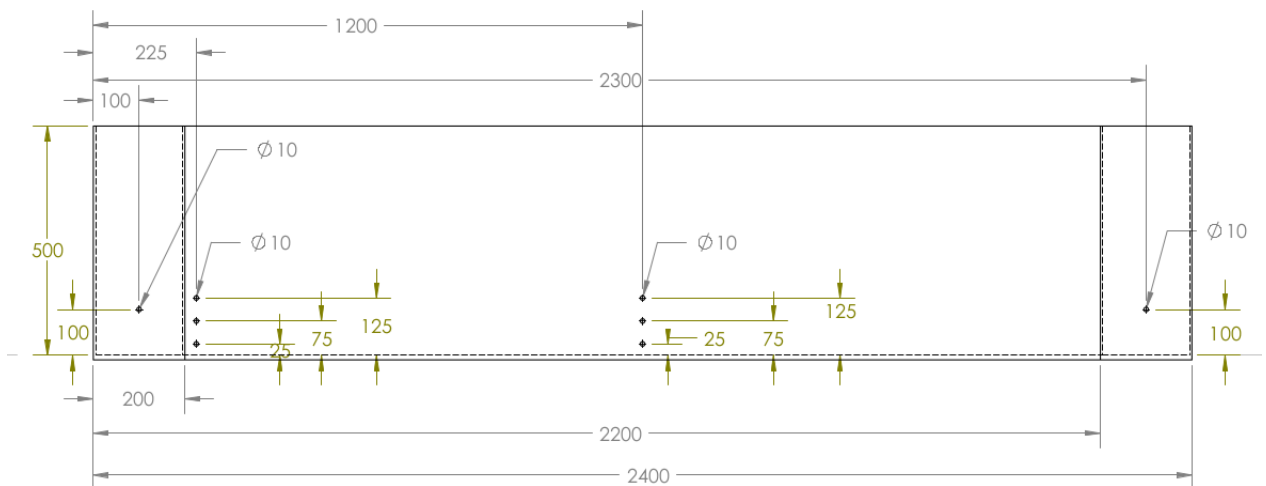


Figura 6.4: Dimensões da célula de Hele-Shaw utilizada[3]

Os resultados obtidos experimentalmente foram:

- $2.34 \times 10^{-5} m^3/s$, configuração onde o ponto de inflexão da curva chega bem próximo ao ponto de sucção. A figura 6.5 ilustra a situação.
- e $2.6 \times 10^{-5} m^3/s$, configuração em que certamente o ponto de inflexão da superfície livre chega ao ponto de sucção.

Não foi possível obter um resultado exato pois:

1. o tempo de convergência da curva formada pela superfície livre pode ser muito grande;
2. não deve-se arriscar que a superfície livre chegue ao ponto de sucção pois caso a bomba sugue ar ela será danificada, prejudicando assim futuros experimentos.

De acordo com a equação 2.18, esses resultados de vazão crítica equivalem, nessa situação, a um Froude:

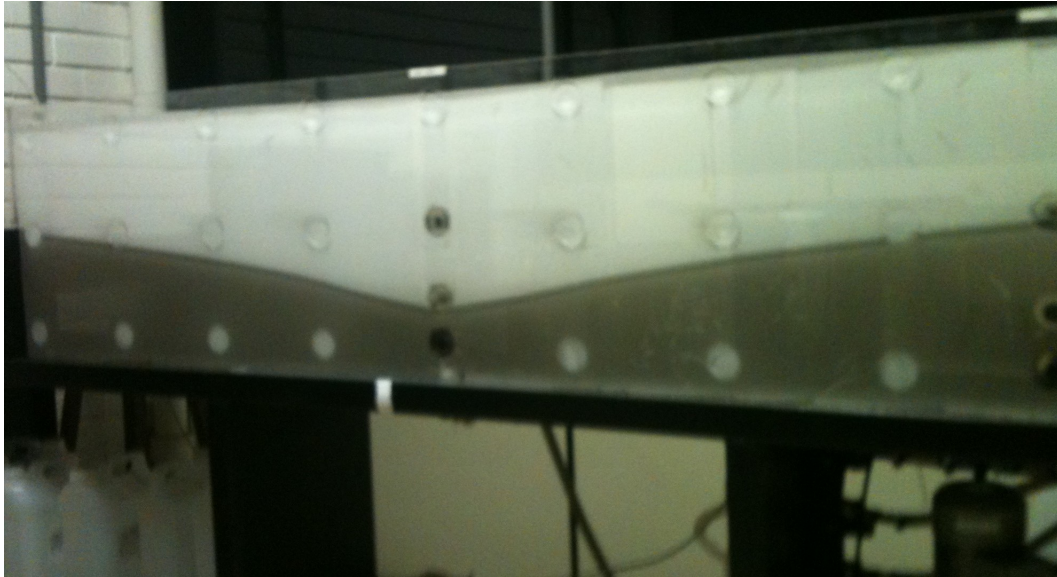


Figura 6.5: Experimento realizado com célula de Hele-Shaw

$$F_{espeçadores} = \frac{Q}{KH} = 0.147 \quad \text{Para o caso antes do colapso}$$

$$F_{espaçadores} = \frac{Q}{KH} = 0.164 \quad \text{Para o caso depois do colapso}$$

Os resultados obtidos pela simulação numérica (Figura 6.6) foram de $F_{critico} = 0.175$ que significa um erro de aproximadamente 6%:

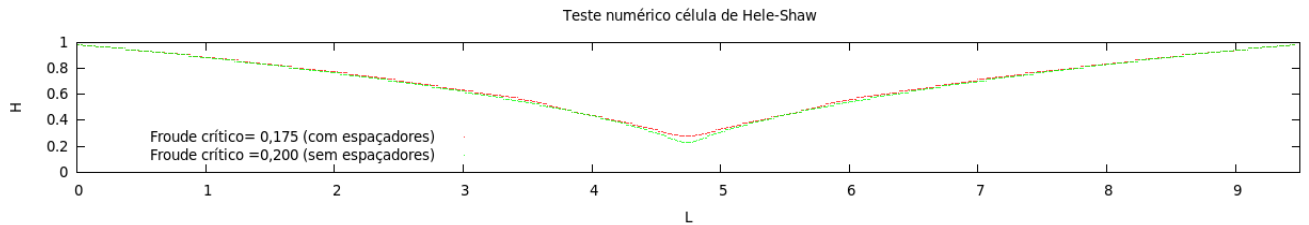


Figura 6.6: Simulação numérica da célula de Hele-Shaw

De acordo com a figura 6.7 podemos observar que assim como nos resultados obtidos anteriormente, a superfície livre responde mais sensivelmente a presença dos espaçadores.

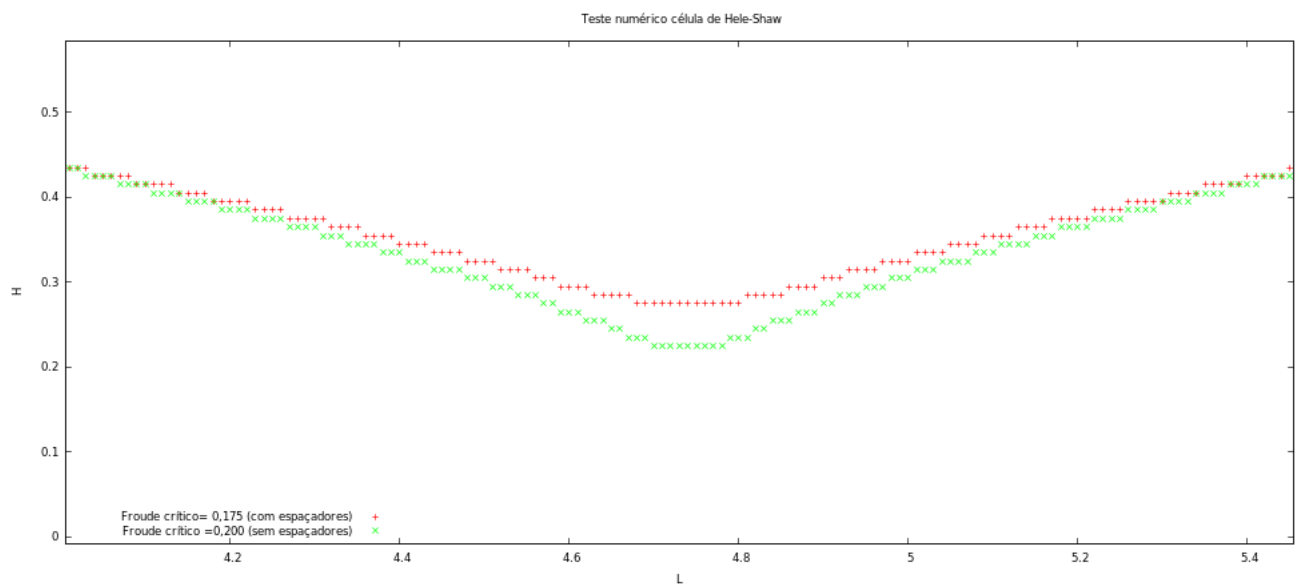


Figura 6.7: Zoom da figura 6.6

Resultados 7

Conclusão

Por meio deste trabalho foi possível implementar o método de diferenças finitas na solução da equação de Darcy para o modelo de escoamento de dois fluidos em meios porosos bidimensionais. Definiu-se um parâmetro adimensional para o problema facilitando a interpretação dos resultados e a entrada das condições de contorno, o que pode ser de grande valia na implementação de um controlador para uma bomba de recuperação de óleo.

O método de diferenças finitas para solução das equações, funcionou perfeitamente e abriu espaço para o estudo da similaridade dinâmica entre os meios isotrópico e anisotrópico, já que a partir dele viu-se que a solução iterativa das equações de um meio isotrópico para um caso real podem ficar muito caras computacionalmente. Fazendo uma análise comparativa com resultados dos trabalhos [3] feito por Morato M S e Domenici R P S, que utiliza o método hodográfico, e o trabalho [5] feito por Silva G V G que utiliza o método de Elementos de Contorno para solução das equações de Darcy para problemas similares ao escoamento óleo/gás, o método de diferenças finitas apresentado no presente trabalho mostra-se complementar pois possui a vantagem de simular um sistema heterogêneo e anisotrópico. Com isso é possível reduzir substancialmente a carga computacional exigida para a solução do problema.

O código permitiu a visualização da interface que separa os dois fluidos, esclarecendo muitos os resultados obtidos. Para verificar a precisão do código numérico utilizado e assim prosseguir com os estudos, a comparação dos resultados com resultados analíticos obtidos pela Aproximação de Dupuit foi de suma importância e deu continuidade ao trabalho.

Durante os estudos notou-se que havia uma relação entre os resultados isotrópicos e anisotrópicos, e assim foi possível obter a similaridade dinâmica existente. Estes resultados apresentaram também uma conclusão bastante importante para a indústria de petróleo, para meios onde a razão $H/L \rightarrow \infty$ qualquer taxa de recuperação imposta ao meio irá colapsar, portanto o que deve ser analisado é o tempo até o colapso. Com isso a indústria pode controlar a taxa de recuperação de óleo para obter um desempenho ótimo sem que haja danos aos equipamentos, mais especificamente a bomba de sucção.

Experimentos foram realizados com a célula de Hele-Shaw construída para o trabalho [3], para isso foi necessário um estudo mais aprofundado sobre o problema. A partir das equações e resultados obtidos no Apêndice A e Apêndice B, foi possível modelar um meio heterogêneo e de forma não trivial. Os resultados gerados a partir dessa implementação mostraram que a presença de inclusões impermeáveis no meio aumenta a sensibilidade do reservatório às taxas de recuperação impostas, ou seja a vazão máxima de um reservatório com inclusões é menor que a de um reservatório homogêneo. Comparativamente aos resultados experimentais obtidos a partir da célula de Hele-Shaw foram muito próximos aos resultados obtidos numericamente, o que é um fator positivo a qualidade do modelo

adotado.

Todos os resultados obtidos foram satisfatórios ao objetivo final, a simulação numérica do comportamento estacionário da interface gás-sólido durante a extração de óleo em reservatórios heterogêneos. Portanto, a conclusão final deste trabalho é que o método de diferenças finitas para solução da equação de Darcy no estudo de escoamento bidimensional entre dois fluidos é bastante plausível.

Apêndices

Apêndice A

Problema gás-óleo: método de diferenças finitas tridimensional

Nesta seção, apresenta-se um esquema de diferenças finitas alternativo para a simulação do comportamento da interface gás-óleo em regime permanente. O presente esquema será aplicado na determinação de vazões críticas para problemas tridimensionais em meios porosos heterogêneos e anisotrópicos.

As equações de diferenças finitas para o campo de pressão são obtidas pela integração

$$\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = -Q \int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}. \quad (1)$$

sobre o volume de controle V tridimensional delimitado pela superfície de controle S , com o campo de velocidade \mathbf{u} dado por:

$$\mathbf{u} = -K[\nabla p + \Theta(p)\nabla z], \quad (2)$$

em que Θ é a função Heaviside:

$$\Theta(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p > 0, \\ 0 & \text{se } p < 0, \end{cases} \quad (3)$$

e p é a pressão dividida por ρg .

A integral de volume no lado direito da Eq. (1) é igual à unidade se o volume V engloba \mathbf{x}_0 (a posição do sumidouro) e se anula quando \mathbf{x}_0 está fora de V .

Para um espaçamento uniforme Δ da malha em todas as direções, a equação de diferenças finitas para p é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{K}p(i, j, k) &= K(i + 1/2, j, k)p(i + 1, j, k) + K(i - 1/2, j, k)p(i - 1, j, k) \\ &+ K(i, j + 1/2, k)p(i, j + 1, k) + K(i, j - 1/2, k)p(i, j - 1, k) \\ &+ K(i, j, k + 1/2)p(i, j, k + 1) + K(i, j, k - 1/2)p(i, j, k - 1) \\ &+ \Delta \left(K(i, j, k + 1/2)\Theta_\epsilon \left(\frac{p(i, j, k) + p(i, j, k + 1)}{2} \right) \right. \\ &\left. - K(i, j, k - 1/2)\Theta_\epsilon \left(\frac{p(i, j, k - 1) - p(i, j, k)}{2} \right) \right) - \bar{K}\frac{F}{6}, \end{aligned} \quad (4)$$

em que F é o número de Froude, definido por

$$F = \frac{6Q}{\bar{K}H}, \quad (5)$$

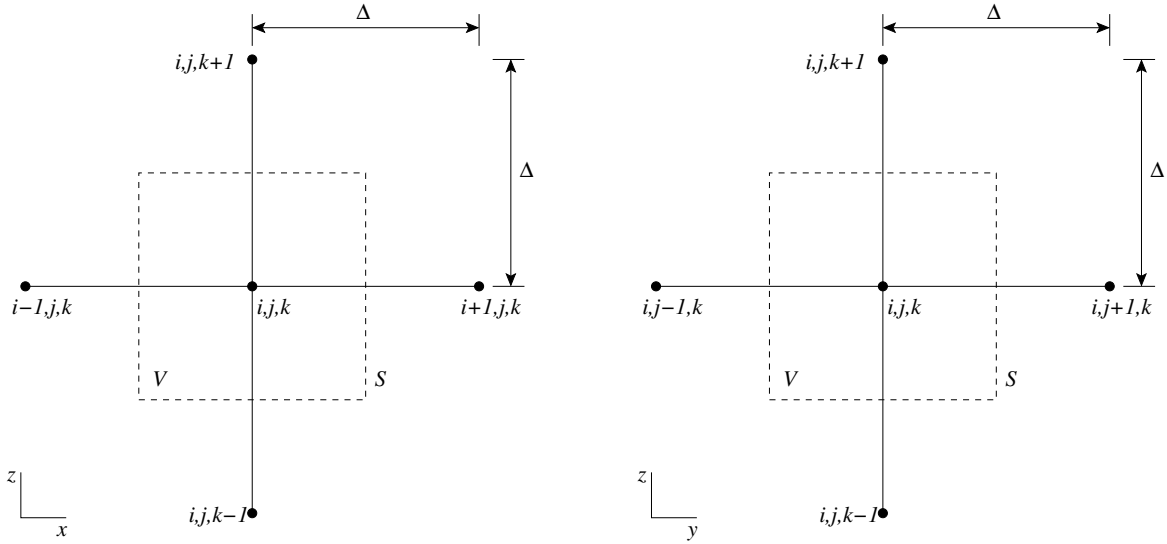


Figura 1: Estêncil da aproximação de diferenças finitas tridimensional.

com

$$\begin{aligned} \bar{K} = & K(i + 1/2, j, k) + K(i - 1/2, j, k) + K(i, j + 1/2, k) \\ & + K(i, j - 1/2, k) + K(i, j, k + 1/2) + K(i, j, k - 1/2). \end{aligned} \quad (6)$$

Nas equações de diferenças finitas $K(i + 1/2, j, k)$, $K(i - 1/2, j, k)$, $K(i, j + 1/2, k)$, $K(i, j - 1/2, k)$, $K(i, j, k + 1/2)$ e $K(i, j, k - 1/2)$ são as condutividades hidráulicas nas interfaces entre os volumes de controle.

Em um meio heterogêneo as condutividades hidráulicas $K(i, j, k)$ em cada nó (i, j, k) da malha de diferenças finitas podem assumir valores diferentes. Neste caso, as condutividades hidráulicas nas interfaces são definidas como uma *média harmônica* das condutividades dos nós adjacentes. Para uma grade regular (ou seja, com um mesmo espaçamento Δ entre nós em todas as direções), as médias harmônicas são definidas por:

$$K(i + 1/2, j, k) = \frac{2K(i, j, k)K(i + 1, j, k)}{K(i, j, k) + K(i + 1, j, k)} \quad (7)$$

$$K(i - 1/2, j, k) = \frac{2K(i, j, k)K(i - 1, j, k)}{K(i, j, k) + K(i - 1, j, k)} \quad (8)$$

$$K(i, j + 1/2, k) = \frac{2K(i, j, k)K(i, j + 1, k)}{K(i, j, k) + K(i, j + 1, k)} \quad (9)$$

$$K(i, j - 1/2, k) = \frac{2K(i, j, k)K(i, j - 1, k)}{K(i, j, k) + K(i, j - 1, k)} \quad (10)$$

$$K(i, j, k + 1/2) = \frac{2K(i, j, k)K(i, j, k + 1)}{K(i, j, k) + K(i, j, k + 1)} \quad (11)$$

$$K(i, j, k - 1/2) = \frac{2K(i, j, k)K(i, j, k - 1)}{K(i, j, k) + K(i, j, k - 1)}. \quad (12)$$

Neste esquema é fácil introduzir, por exemplo, inclusões impermeáveis dentro do domínio. Basta atribuir o valor “zero” às condutividades hidráulicas dos nós localizados no interior da inclusão impermeável. A média harmônica das condutividades informa automaticamente que a interface entre a inclusão impermeável e o meio poroso é uma superfície de fluxo nulo.

Apêndice B

Problema gás-óleo: método de diferenças finitas bidimensional

Esta seção descreve sucintamente um método de diferenças finitas para a solução numérica do problema de superfície livre em um meio poroso heterogêneo. O método é uma extensão daquele proposto nas Referências [1]. O esquema aqui descrito encontra aplicação na determinação de solução estacionária somente.

A equação de Darcy (2.8) e a condição de contorno de pressão na superfície livre podem ser agrupadas na equação abaixo:

$$\mathbf{u} = -K[\nabla p + \Theta(p)\hat{\mathbf{y}}] \quad (13)$$

em que p é a pressão dividida por ρg , $\hat{\mathbf{y}}$ denota o vetor unitário na direção y , e Θ é a função Heaviside.

O conjunto de equações de diferenças finitas para o campo p são obtidas pela integração da Eq. (??) sobre o volume de controle V delimitado pela superfície de controle S (indicados na Fig. 7):

$$\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = -Q \int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}. \quad (14)$$

A integral de volume no lado direito da Eq. (14) é igual à unidade se o volume V engloba \mathbf{x}_0 (a posição do sumidouro) e se anula quando \mathbf{x}_0 está fora de V .

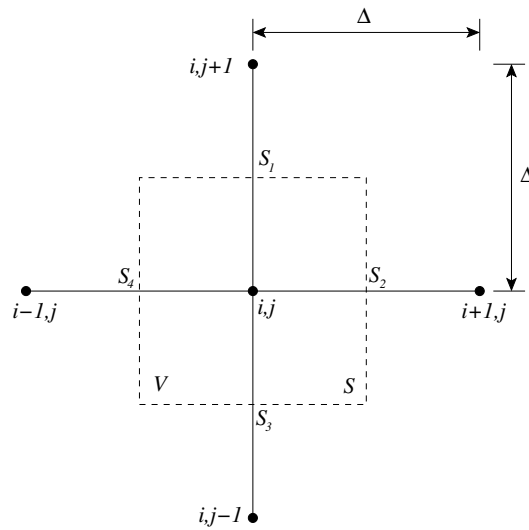


Figura 2: Estêncil da aproximação de diferenças finitas.

O esquema descrito acima pode ser implementado sem dificuldades para meios porosos anisotrópicos; basta avaliar (14) com \mathbf{u} dado por

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \cdot [\nabla p + \Theta(p)\hat{\mathbf{y}}], \quad (15)$$

o correspondente anisotrópico da Eq. (13), em que K é o tensor condutividade hidráulica.

Para o caso bidimensional, denotaremos K por

$$K = \begin{pmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{pmatrix} = \text{diag}(K_x, K_y), \quad (16)$$

em que K_x e K_y são as condutividades hidráulicas nas direções x e y , respectivamente. A forma diagonal do tensor \mathbf{K} indica que escolhemos os vetores-base $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ alinhados com as direções principais (autovetores) do tensor \mathbf{K} .

A seguir, avaliaremos a integral de superfície indicada na Eq. (14) com \mathbf{u} dado pela Eq. (15). A integral será avaliada sobre a superfície S indicada na Fig. 7. Esta é composta de quatro partes: S_1 (com $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{y}}$), S_2 ($\mathbf{n} = \hat{\mathbf{x}}$), S_3 ($\mathbf{n} = -\hat{\mathbf{y}}$) e S_4 ($\mathbf{n} = -\hat{\mathbf{x}}$).

Por conveniência, escreveremos a integral em termos de duas contribuições: uma devida ao campo de pressão, dada por

$$\int_S (\mathbf{K} \cdot \nabla p) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (17)$$

e outra devida à gravidade,

$$\int_S \Theta(p)(\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{y}}) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (18)$$

Explicitamente, a contribuição do campo de pressão é dada por

$$\begin{aligned} \int_S (\mathbf{K} \cdot \nabla p) \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{S_1} (\mathbf{K} \cdot \nabla p) \cdot \hat{\mathbf{y}} dS + \int_{S_2} (\mathbf{K} \cdot \nabla p) \cdot \hat{\mathbf{x}} dS \\ &+ \int_{S_3} (\mathbf{K} \cdot \nabla p) \cdot (-\hat{\mathbf{y}}) dS + \int_{S_4} (\mathbf{K} \cdot \nabla p) \cdot (-\hat{\mathbf{x}}) dS. \end{aligned} \quad (19)$$

Notando que

$$\mathbf{K} \cdot \nabla p = K_x \frac{\partial p}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + K_y \frac{\partial p}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \quad (20)$$

e assumindo uma malha regular ($\Delta x = \Delta y = \Delta$), segue que

$$\int_{S_1} (\mathbf{K} \cdot \nabla p) \cdot \hat{\mathbf{y}} dS = K_y \frac{\partial p}{\partial y} \Delta \approx K_y(i, j + 1/2)[p_{i,j+1} - p_{i,j}], \quad (21)$$

em que $K_y(i, j + 1/2)$ denota a condutividade hidráulica na direção y avaliada na superfície S_1 . As pressões nos pontos (i, j) e $(i, j + 1)$ da malha são denotadas, respectivamente, por $p_{i,j}$ e $p_{i,j+1}$. Na Eq. (21) foi utilizada a seguinte aproximação de diferenças finitas:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta}. \quad (22)$$

De forma análoga para os demais termos:

$$\int_{S_2} (\mathbf{K} \cdot \nabla p) \cdot \hat{\mathbf{x}} dS = K_x \frac{\partial p}{\partial x} \Delta \approx K_x(i + 1/2, j)[p_{i+1,j} - p_{i,j}], \quad (23)$$

$$\int_{S_3} (\mathbf{K} \cdot \nabla p) \cdot (-\hat{\mathbf{y}}) dS = -K_y \frac{\partial p}{\partial y} \Delta \approx K_y(i, j - 1/2)[p_{i,j-1} - p_{i,j}], \quad (24)$$

$$\int_{S_4} (\mathbf{K} \cdot \nabla p) \cdot (-\hat{\mathbf{x}}) dS = -K_y \frac{\partial p}{\partial y} \Delta \approx K_y(i, j + 1/2)[p_{i,j+1} - p_{i,j}], \quad (25)$$

Agora para o termo de gravidade:

$$\int_S \Theta(p) (\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{y}}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \Theta(p) K_y dS - \int_{S_3} \Theta(p) K_y dS, \quad (26)$$

com

$$\int_{S_1} \Theta(p) K_y dS \approx \Theta \left[\frac{p_{i,j} + p_{i,j+1}}{2} \right] K_y(i, j + 1/2) \Delta, \quad (27)$$

$$\int_{S_3} \Theta(p) K_y dS \approx \Theta \left[\frac{p_{i,j} + p_{i,j-1}}{2} \right] K_y(i, j - 1/2) \Delta. \quad (28)$$

Por simplicidade, consideremos um sistema com anisotropia constante,

$$\frac{K_y}{K_x} = \lambda = \text{constante}, \quad (29)$$

e definimos $K_x \equiv K$.

Utilizando esta consideração, somando as contribuições da pressão e da gravidade e resolvendo as equações de diferenças finitas para $p_{i,j}$ (adimensionalizada pela altura H da interface não-perturbada), obtemos:

$$\begin{aligned} p_{i,j} &= \hat{K}(i + 1/2, j)p_{i+1,j} + \hat{K}(i - 1/2, j)p_{i-1,j} \\ &+ \lambda \hat{K}(i, j + 1/2)p_{i,j+1} + \lambda \hat{K}(i, j - 1/2)p_{i,j-1} \\ &+ \lambda \Theta \left[\frac{p_{i,j} + p_{i,j+1}}{2} \right] \hat{K}(i, j + 1/2) \Delta \\ &+ \lambda \Theta \left[\frac{p_{i,j} + p_{i,j-1}}{2} \right] \hat{K}(i, j - 1/2) \Delta - \chi(i, j) \frac{F}{4}. \end{aligned} \quad (30)$$

Na Equação (30), $\hat{K} \equiv K/\bar{K}$, em que

$$\bar{K} \equiv K(i + 1/2, j) + K(i - 1/2, j) + \lambda[K(i, j + 1/2) + K(i, j - 1/2)], \quad (31)$$

F é o número de Froude

$$F = \frac{Q}{H(\bar{K}/4)}, \quad (32)$$

e $\chi(i, j)$ é a função característica do sumidouro. $\chi(i, j)$ é igual à unidade se o sumidouro encontra-se no interior da região delimitada por S , centrada no ponto (i, j) . Caso contrário, $\chi(i, j) = 0$.

Nas equações de diferenças finitas $\hat{K}(i + 1/2, j)$, $\hat{K}(i - 1/2, j)$, $\hat{K}(i, j + 1/2)$, $\hat{K}(i, j - 1/2)$ são as condutividades hidráulicas (normalizadas) nas interfaces entre as superfícies de controle.

Em um meio heterogêneo, as condutividades hidráulicas $\hat{K}(i, j)$ em cada nó (i, j) da malha de diferenças finitas podem assumir valores diferentes. Neste caso, as condutividades hidráulicas nas interfaces são definidas como uma *média harmônica* das condutividades dos nós adjacentes. Para uma grade regular (ou seja, com um mesmo espaçamento Δ entre nós em todas as direções), as médias harmônicas são definidas por:

$$\hat{K}(i + 1/2, j) = \frac{2\hat{K}(i, j)\hat{K}(i + 1, j)}{\hat{K}(i, j) + \hat{K}(i + 1, j)} \quad (33)$$

$$\hat{K}(i - 1/2, j) = \frac{2\hat{K}(i, j)\hat{K}(i - 1, j)}{\hat{K}(i, j) + \hat{K}(i - 1, j)} \quad (34)$$

$$\hat{K}(i, j + 1/2) = \frac{2\hat{K}(i, j)\hat{K}(i, j + 1)}{\hat{K}(i, j) + \hat{K}(i, j + 1)} \quad (35)$$

$$\hat{K}(i, j - 1/2) = \frac{2\hat{K}(i, j)\hat{K}(i, j - 1)}{\hat{K}(i, j) + \hat{K}(i, j - 1)} \quad (36)$$

Neste esquema é fácil introduzir, por exemplo, inclusões impermeáveis dentro do domínio. Basta atribuir o valor “zero” às condutividades hidráulicas dos nós localizados no interior da inclusão impermeável. A média harmônica das condutividades informa automaticamente que a interface entre a inclusão impermeável e o meio poroso é uma superfície de fluxo nulo.

Apêndice C

Hele-Shaw

O campo de velocidade bidimensional $u = (u, v)$ de um fluido viscoso em um meio poroso é governado pela lei de Darcy

$$u = \frac{-k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = \frac{-k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (37)$$

em que μ é a viscosidade do fluido e k é a permeabilidade intrínseca do meio.

Escoamentos bidimensionais em meios porosos podem ser reproduzidos experimentalmente utilizando-se uma célula de Hele-Shaw, onde fluido viscoso escoar entre duas placas planas separadas por uma distância b constante.

Para b muito pequeno comparado com o comprimento e a largura das placas, as componentes u e v do escoamento em uma célula de Hele-Shaw são dadas por:

$$u(z) = \frac{-1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z(b-z), \quad v(z) = \frac{-1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} z(b-z) \quad (38)$$

Definindo as velocidades médias

$$\bar{u} = \frac{1}{b} \int_0^b u \, dz, \quad \bar{v} = \frac{1}{b} \int_0^b v \, dz, \quad (39)$$

e usando a Eq. 38, é fácil mostrar que

$$\bar{u} = \frac{-b^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \bar{v} = \frac{-b^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (40)$$

Comparando-se as Equações 37 e 40 podemos afirmar que o campo de velocidade

$$\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, \bar{v})$$

observado experimentalmente em uma célula de Hele-Shaw (com espaçamento b entre as placas) é dinamicamente similar ao escoamento bidimensional de fluido com viscosidade μ em um meio poroso com permeabilidade intrínseca

$$k = \frac{b^2}{12} \quad (41)$$

e condutividade hidráulica

$$K = \frac{\rho g b^2}{12\mu} \quad (42)$$

Referências Bibliográficas

- [1] Bear J 1972 *Dynamics of fluids in porous media* (Dover)
- [2] Bardet J P and Tobita T 1991 *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **88** 341-361
- [3] Morato M S and Domenici R P S 2012 *ANÁLISE DE ESCOAMENTO BIFÁSICO EM MEIO POROSO*
- [4] Chevron Brasil R and D, Project Nr. 29, *Water Influx in Heavy Oil Reservoirs*
- [5] Silva G V G *ESTUDO DO FENÔMENO DO CONE DE ÁGUA EM POÇOS DE PETRÓLEO USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO*